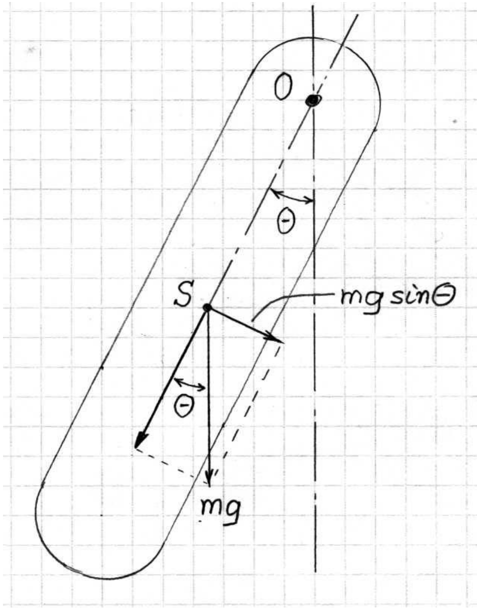
Ćwiczenie 1 (opis bazuje na opisie Ćw.1.)*

Cel ćwiczenia: Zapoznanie się z ruchem drgającym wahadła fizycznego. Wyznaczenie momentu bezwładności brył sztywnych przez pomiar okresu drgań wahadła oraz na podstawie wymiarów geometrycznych.

Wprowadzenie

Wahadłem prostym (matematycznym) nazywamy punktową masę zawieszoną na nieważkiej nici. Przybliżoną realizację tego wyimaginowanego obiektu stanowić może np. mała kula zawieszona na nici krawieckiej (Ćw.0). *Wahadłem fizycznym* nazywamy natomiast bryłę sztywną mogącą obracać się wokół osi obrotu *O* nie przechodzącej przez środek masy *S* (rys. 1).



Wahadło odchylone od pionu o kąt θ, a następnie puszczone swobodnie, będzie wykonywać drgania zwane ruchem wahadłowym. W ruchu tym mamy do czynienia z obrotem bryły sztywnej wokół osi *O*, opisuje go zatem druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Zasady dynamiki dla ruchu postępowego, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, i obrotowego, $I\,\varepsilon = \mathbf{M}$, wyraża matematycznie takie samo równanie, tyle że zamiast masy *m* mamy moment bezwładności *I*, odpowiednikiem przyspieszenia liniowego **a** jest przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon} = d^2\theta/dt^2$ i odpowiednikiem siły **F** jest moment siły **M**. Gdy oś obrotu jest ustalona (ten najczęstszy w technice przypadek dotyczy również wahadła fizycznego) wektory **ε** i **M** można traktować jako wielkości skalarne.

Rys. 1. Wahadło fizyczne.

Dla wahadła fizycznego moment siły powstaje pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Dla wychylenia θ jest równy $M=mg\,a \sin\theta$, gdzie *a* oznacza odległość środka masy *S* od osi obrotu *O*. Zatem równanie ruchu wahadła można zapisać jako

$$I_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\;a\;sin(\theta) \qquad (1)$$

gdzie I_0 jest momentem bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia *O*. Znak minus po prawej stronie uwzględnia fakt, że moment siły jest skierowany przeciwnie do kierunku wychylenia.
Jeżeli ograniczyć ruch do małych kątów wychylenia (kilka stopni), to sinus kąta można zastąpić samym kątem w mierze łukowej, czyli $\sin\theta \approx \theta$. Przy tym założeniu równanie (1) przyjmuje postać

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta(t) = 0 \qquad (2)$$

gdzie $\omega_0 = \frac{mga}{I_0}$. Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (3)$$

przedstawia ruch harmoniczny. Amplituda θ_m i faza α zależą od warunków początkowych. Okres drgań *T*, związany bezpośrednio z częstością ($\omega_0 = 2\pi/T$) wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} \tag{4}$$

Pomiar okresu wahadła T, odległości a, i masy m umożliwia wyznaczenie dla badanego ciała momentu bezwładności I_0. Dla wyznaczenia momentu bezwładności I_S względem równoległej osi przechodzącej przez środek masy możemy posłużyć się związkiem między I_0 i I_S znanym jako twierdzenie Steinera,

$$I_0 = I_S + ma \tag{5}$$

Bryłę sztywną można traktować jako ciągły zbiór punktów materialnych o różnych odległościach od osi obrotu. Moment bezwładności punktu materialnego jest definiowany jako iloczyn masy i kwadratu odległości od osi obrotu. Momenty bezwładności brył sztywnych, tak I_0 jak i I_S , wyraża się jako całkę oznaczoną

$$I = \int_m r^2\,dm \tag{6}$$

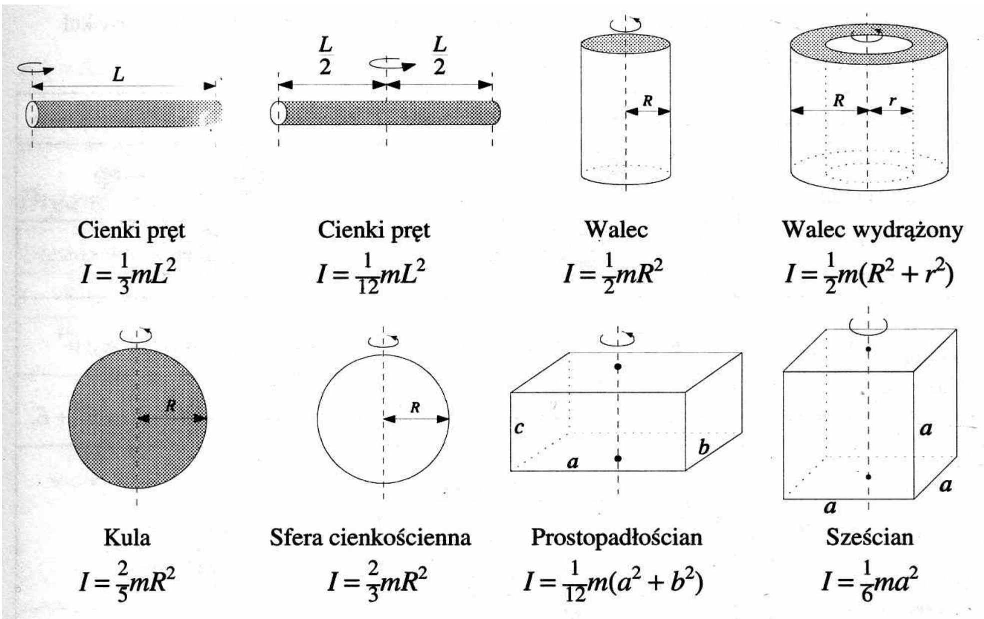
gdzie r jest odległością elementu masy dm od osi obrotu. Całkę (6) można analitycznie obliczyć dla brył jednorodnych o prostych kształtach. Przykłady takich obliczeń podane są w podręcznikach.

Istotą ćwiczenia jest wyznaczenie momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości I_S dwoma metodami.

Pierwsza polega na wprawieniu bryły w ruch drgający o małej amplitudzie i zmierzeniu jego okresu T. Wzór (4) pozwala obliczyć moment bezwładności względem osi obrotu I_0. Następnie, wykorzystanie twierdzenia Steinera (5) umożliwia obliczenie momentu bezwładności dla osi przechodzącej przez środek ciężkości bryły I_S.

Drugi sposób, to obliczenie $I_{S(\mathrm{geom})}$ na podstawie masy i wymiarów geometrycznych badanej bryły. Potrzebne do interpretacji eksperymentu wzory na Is dla wybranych brył podaje rys. 2.

Dla obydwu metod można obliczyć niepewności złożone $u_c(I_S)$ oraz $u_c(I_{S(\mathrm{geom})})$ i ustalić, która metoda wyznaczenia momentu bezwładności jest dokładniejsza oraz sprawdzić, czy uzyskane wartości I_S oraz $I_{S(\mathrm{geom})}$ są ze sobą zgodne.



Rys. 2. Momenty bezwładności brył o regularnych kształtach. Reprodukcja z: *Tablice fizyczno-astronomiczne*, oprac. W. Mizerski i W. Nowaczek, Wyd. Adamantan, Warszawa 1995.